Chapter 2 – The Klein-Gordon Field

Sho IWAMOTO [ID:61508] (Dept. of Physics : Senior)

April 24, 2007

Section 2.1 The Necessity of the Field Viewpoint

■前口上

- 量子力学← Dynamic な粒子，場の量子論← **Dynamic な場**
- Relativistic particle を扱うには field の quantize が必要。 → 何故？
  - 普通に相対論的波動関数を書くと，負 energy だとか色々な不合理が起こる。[*1]
  - 対生成に必要な energy が無くとも，不確定性原理により Δt の間だけ対生成が起こる (virtual particle)。 → 大変。[*2]
  - 因果律の観点からも説明が出来る。量子力学の復習がてらそれを追おう。

■量子力学は因果律を (あっさりと) 破る。

(まぁ当たり前の話なのだが。)

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{-iHt/\hbar} | \boldsymbol{x}_0 \rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \langle \boldsymbol{x} | \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{p}^2/2m\hbar)t} | \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{p} | \boldsymbol{x}_0 \rangle \qquad {}^{*3} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{p}^2/2m\hbar)t} \cdot \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/\hbar} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t} \right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{im(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2/2\hbar t}
\end{aligned}
$$

となる。途中の計算については，付録 A を参照のこと。

さて，この式を見ると，$\Delta x/\Delta t > c = 1$ でも $U \neq 0$ となっている。そればかりか，$|U(t)|^2$ が位置に依存していないため，粒子の速度 ∞ での移動を許していることになる。これは相対論の要請に反する。

その原因は，$|\boldsymbol{x}_0\rangle$ が任意の運動量の波を等しく含んでいるためである。[*4]

■$E = \sqrt{p^2 + m^2c^4}$ を以てしても。

まぁうまくいかないってことだ。(この式を見て c を特別扱いできないから当然。積分する必要もない。)

[*1] Klein-Gordon eqn. or Dirac eqn. のこと。このあたりの歴史的経緯は，確か Weinberg で詳しく扱ってた気がする。

[*2] Text では，量子力学の 2 次摂動で任意の励起状態 $|n\rangle$ が出たのと比べて，“真空の励起状態” として virtual particle を考えている。

[*3] Fourier 変換と見る方が素直だが，とりあえず最初なのでこう書くことにする。

[*4] x を指定しているために $\Delta p = \infty$ なのである。運動量 p を指定した波である平面波が座標空間で位置についての情報を指定しないのと同様。平面波の座標表示 $\langle x|p\rangle$ は，“粒子” の運動量表示 $\langle p|x\rangle$ の共役である。というかそうなると，そもそも相対論的要請を満たさないのは当たり前だろう。積分する必要もあまり無かったのかもしれない。この積分めんどいし。

■因果律をどのように解決するか。

粒子の空間的な移動は，反粒子の逆向きの空間移動と全く同じであると考える。Time-like な 2 点間の測定では，粒子は (時間 “発展” により) 移動するが反粒子の “逆向き” の移動は (時間をさかのぼるため) 起こらない。Space-like な 2 点間では，座標変換により粒子の移動は反粒子の移動と同一視できるため，その**両方が起きている**と考えれば，何も起きていないことになる。と云う理解でいいのかは分からないが，とりあえずこういう理解をしておくことにする。未だにこの問題については明確な vision を持てていないのだ。いずれ厳密に理解できるだろう。っていうか **too miraculous**。

ところで QFT はこのような仮想的な面も多いが，それよりも，QFT により observable な量 (散乱断面積, 粒子の寿命など) が計算でき，実験的な検証が出来るところがなかなかグッと来るところである。Chapter 5 ではそのようなグッと来る例を扱う。計算がめんどくさい上に途中から飽きてくるけど。

◆Lagrangian Field Theory

よく知られているように，作用 S は Lagrangian L の時間積分で定義される。

ところで，場の理論では位置ごとの Lagrangian，つまり Lagrangian density $\mathcal{L}$ を用いることが多く，

$$S = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \tag{2.1}$$

となって**時間が特別ではなくなる。**(Lorentz 不変!) *5古典力学で Lagrangian が x と $\dot{x}$ で記述されたのと同様に，Lagrangian Density も場とその微分 $\{\phi, \partial_\mu\phi\}$ で記述されるようである。

Lagrange 力学では，全ては最小作用の原理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

により定められた。今回も最小作用の原理で

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{2.3}$$

となる。**ここの計算過程はごく簡単であるが，重要である。**

と書いたはいいが，物理がさっぱり見えない。Lagrangian を場とその微分で定義する，とはどういうことなのだろう？ そう書いてしまえば，最小作用の原理まで straightforward なのだけど。

◆Hamiltonian Field Theory

作用のとこでは時空は対等であったが，どうやら引き続き時間を特別扱いしたいらしい。

古典力学と同様に話を進めると，**ϕ に共役な**運動量**密度**

$$\pi(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\boldsymbol{x})} \tag{2.4}$$

が定義され，Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}$ も

$$H =: \int \mathcal{H}\,\mathrm{d}^3x = \int \mathrm{d}^3x\left[\pi(\boldsymbol{x})\dot{\phi}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{L}\right] \tag{2.5}$$

となるであろう。*6ただし，この表式は後に別の形で，類推を用いずに再導出する。

■例

単一の場 ϕ からなる Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.6}$$

(ってこれどういう Lagrangian??*7) では最小作用の原理は速やかに

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{2.7}$$

となり，Hamiltonian は

$$H = \int \mathrm{d}^3x\left[\dot{\phi}(\boldsymbol{x})\dot{\phi}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{L}\right] \tag{2.8}$$

---

*5 ここで，g は計量の行列式であり，時空の単位体積である。今回は Minkowski 型の平坦な時空を考えて $g = -1$。っていうかこの辺は全然分かっていない。まぁ一般相対論を勉強してからだわわ。

*6 式 (2.4) の上の計算はただの言い訳に過ぎず，本質は含まれていないだろう。

*7 あぁ，そいえば Lagrangian はいつも天下りだった。

となる。$\frac{1}{2}\pi^2$ は移動の energy，$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ は場を刈り込む energy，$\frac{1}{2}m^2\phi^2$ は場があることによる energy といえる。といわれても……意味不明。何となくは分かるけど。いつかわかる日が来るのだろう。流体力学の知識から類推できるらしい。

ところで，(2.7) は Klein-Gordon 方程式らしいのだが，しかしいきなり持ってこられても困る。EMAN の物理学 [1] ではこれを，$E^2 = \|\boldsymbol{p}\|^2 + m^2$ を演算子にして $-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\nabla^2\phi + m^2\phi$ とする，という形で導いているが，そちらの方が自然であるという印象を受ける。

◆Noether's Theorem

対称性があれば保存則がある，という定理。

場 $\phi(x)$ の無限小変換

$$\phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) \tag{2.9}$$

に対して運動方程式の形が変わらないならば，この変換に関して対称性がある，といえる。

ところで，この変換に対して Lagrangian は

$$\alpha\Delta\mathcal{L} = \alpha\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right] \tag{2.11}$$

と変化する。**これは場 ϕ を通じた変化の表式である。**

運動方程式の形が変わらないということは，作用が定数のずれを許して変わらなければよいので，つまり

$$^\exists\mathcal{J}^\mu(x), \quad \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \alpha\,\partial_\mu\mathcal{J}^\mu \tag{2.10}$$

と，**ある vector $\mathcal{J}^\mu$** を用いて表すことが出来ればよい。**これは座標 x を通じた変化の表式である。**[*8]

即ち，このように表せるならば (つまり対称性があるならば) 保存則

$$\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right]$$

あるいは

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \qquad \text{for} \quad j^\mu(x) := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}^\mu \tag{2.11}$$

が成立する。

ただし，実際に保存則を対称性から導くには，Lagrangian の変化から上手い $\mathcal{J}^\mu$ を考えなければならないのだろう。

ところで，これは時空分離すると

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} = \nabla\cdot\boldsymbol{j} \tag{2.12}$$

となるが，これを全空間積分すると，**空間の端で $\Delta\phi = 0$ と保証されている $\Delta\phi$，および空間の端で 0 となるように作った $\mathcal{J}^i$ に対して**

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{\text{space}} \mathrm{d}V \frac{\partial j_0}{\partial t} = \int_{\text{space}} \nabla\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.13}$$

となる。これは古典的な保存則である。**場の量子論では直接に local な方程式 (2.12) が得られる**，ということがグッと来るところである。

っていうかあまり端の方気にしたくないから，こういう表式用いたくないね。[*9]

[*8] 場による変化と座標による変化を混同しないように。この区別，そしてこれが共に等しいということが point である。

[*9] そういえば，素粒子をやってると境界とかどうでも良くなってくるらしいが，物性の人は境界条件こそが肝要らしい。残念ながら僕は物性にはあまり興味が無いので，境界条件にも興味は無い。

■例 1. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$ に対する，場の底上げ対称性

$\phi \to \phi + \alpha$ (α は微少量，即ち $\Delta\phi = 1$) の変化に対して $\mathcal{L}$ は**座標を通じては**変化しないので，

$$\mathcal{J}^\mu = 0, \quad j^\mu = \partial^\mu\phi \text{ が local に保存}$$

となる。

■例 2. $\mathcal{L} = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2$ に対する，場の位相変え対称性 (場が複素数)

$\phi \to e^{i\alpha}\phi \simeq \phi + i\alpha\phi$ に対しても，やはり座標的には変化しないので，$\mathcal{J}^\mu = 0$ である。故に

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\Delta\phi^* = i\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)\right] \tag{2.16}$$

が保存するわけである。

なお，この取り扱いは ϕ と ϕ^* を別々に取り扱ったが，場を虚実分解して $\phi = \phi_R + i\phi_I$ として取り扱うとすると，

$$\begin{aligned}
&\Delta\phi_R = -\phi_I, \quad \Delta(i\phi_I) = i\phi_R \\
&\therefore\ j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_R)}\Delta\phi_R + \frac{1}{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_I)}\Delta(i\phi_I) = (\partial^\mu\phi_R)(-\phi_I) + (\partial^\mu\phi_I)\phi_R
\end{aligned}$$

となり，同様に (2.16) 式が求まる。[*10]

ところで，上述の Lagrangian から得られる Klein-Gordon 方程式は

$$\partial^2\phi + m^2\phi = 0 \quad \text{and} \quad \partial^2\phi^* + m^2\phi^* = 0$$

である。この式から，**複素 Klein-Gordon 場を考えることは，2 つの Klein-Gordon 場を扱うことと同値**であることが分かる。複素場になっても，場の性質そのものに違いがあるわけではないので安心してよい。

また，(2.16) 式が保存することを (2.12) 式を用いて顕に示すことが出来る：

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= i\cdot\partial_\mu\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)\right] \\
&= i\cdot\left[(\partial^2\phi^*)\phi + (\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi)\right] - i\cdot\left[(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + \phi^*(\partial^2\phi)\right] \\
&= 0。
\end{aligned}$$

■座標についての変換

ここでは α を明示せずに (2.9) から (2.12) 式を使っているため，まず始めにこれらの式を α を明示しない形で書き直す：

$$\phi(x) \to \phi(x) + \Delta\phi(x), \qquad \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x), \qquad \Delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right].$$

座標が $x^\mu \to x^\mu - a^\mu$ と変換するとき，ϕ も $\mathcal{L}$ も同じように変換し，特に x^ν の変換による変化を明示的に

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + a^\nu\partial_\mu J^\mu{}_\nu, \qquad \Delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(a^\nu\partial_\nu\phi)\right]$$

とか書けば，$J^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}$ とかなって，結局

$$T^\mu{}_\nu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu \tag{2.17}$$

[*10] 係数の 2 は勿論重要ではない。2 が出てくるのがイヤなら，$\phi = (\phi_R + i\phi_I)/\sqrt{2}$ と定義を規格化すればよい。

が保存することになる。**これは場 ϕ に対する stress-energy tensor，あるいは energy-momentum tensor** と呼ばれる。

ところで勿論この式は (2.12) 式と

$$a^\nu T^\mu{}_\nu = \alpha j^\mu$$

の関係にあるような気がする。

式 (2.17) で $\mu = \nu = 0$ とすると

$$T^0{}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L} \tag{2.18}$$

でありこれは Hamiltonian である。

そして，これが Energy なら，momentum は勿論

$$T^{0i} = -T^0{}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}(\partial_i \phi) = -\pi \partial_i \phi \tag{2.19}$$

となる。物理的にどんな意味があるのでしょうねぇ。

Section 2.3 The Klein-Gordon Field as Harmonic Oscillator

■Klein-Gordon 場の量子化

簡単のため，実場を考える。

ここでの本質は，古典的な正準交換関係を意識して，場 ϕ と運動量 π を量子化すること，つまり次の式

$$[\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2.20}$$

にある。[*11]

Klein-Gordon 場 ϕ は,

$$\begin{cases} \text{Hamiltonian} : H = \displaystyle\int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \\ \text{Equation} : (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0 \end{cases}$$

に従う。この式に Fourier 変換

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{+ip\cdot x}\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{p})$$

を代入して変形すると,

$$\text{Equation} : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \|\boldsymbol{p}\|^2 + m^2\right)\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{p}) = 0 \tag{2.21}$$

となる。特に $\omega_{\boldsymbol{p}} := \sqrt{\|\boldsymbol{p}\|^2 + m^2}$ とすれば，粒子量子論での調和振動子と似た形となる。

> P.20 の下半分は粒子量子論の復習である。
>
> $$\begin{cases} \text{Hamiltonian} : H = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ \text{Equation} : \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \end{cases}$$
>
> に従う x(つまり調和振動子) に対して，量子条件 $[x,p] = i\hbar$ の下で
>
> $$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$
>
> となった，ということのみ指摘しておく。

ところが，今回は (2.23) 式を粒子量子論の結果と比較したいわけなので，交換関係 (2.20) をそのまま用いるのではなく，(2.20) を Fourier 変換した形

$$[\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{p}),\tilde{\pi}(t,\boldsymbol{q})] = i(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$$

を用いなければならない。これを満たすようにするには,

$$\textbf{Klein-Gordon 場の量子化}\begin{cases} \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{p}}) & (2.27) \\ \tilde{\pi}(t,\boldsymbol{p}) = \dfrac{1}{i}\sqrt{\dfrac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}(a_{\boldsymbol{p}} - a^\dagger_{-\boldsymbol{p}}) & (2.28) \\ [a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) & (2.29) \end{cases}$$

のようにするのがよい。

[*11] 式 (2.20) とは若干形が異なるが，式 (2.43)，および異なる時刻の Hamiltonian が交換することからこのようにも書ける。

実は，素直に

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{p}) \propto (a_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}) \\ \tilde{\pi}(t,\boldsymbol{p}) \propto (a_{\boldsymbol{p}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}) \end{cases}$$

と構成することも可能だが，その場合，生成演算子と消滅演算子の交換関係が

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$$

となってしまい，気持ち悪い。

ところで，以上の結果から

$$\text{交換関係：}\quad [\phi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2.30}$$

$$\text{Hamiltonian：}\quad H = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\omega_{\boldsymbol{p}}\left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2}[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}]\right) \tag{2.31}$$

$$[H, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}] = \omega_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}, \qquad [H, a_{\boldsymbol{p}}] = -\omega_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}} \tag{2.32}$$

$$\text{Momentum：}\quad \boldsymbol{P} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{p}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}} \tag{2.33}$$

を容易に確かめることが出来る。これは良い計算練習になる。[*12]

■量子化の結果の解釈

Hamiltonian の ∞ ：場として無限個 ($\int \mathrm{d}^3x$) の調和振動子を考えたことに起因

→ **Energy 差のみを考えることにして無視する。**[*13]

$a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ と $a_{\boldsymbol{p}}$ の意味：これは明らかに，energy $\omega_{\boldsymbol{p}}$，momentum $\boldsymbol{p}$ の粒子の生成消滅演算子。

特に，特殊相対論より $p^2 = m^2 = E^2 - \|\boldsymbol{p}\|^2$ であるので，$\omega_{\boldsymbol{p}}$ はまさに粒子の energy $E_{\boldsymbol{p}}$ である。

粒子の統計性：$a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ は交換するので，Boson。

特に，1 種類の場しか作れないので，**Klein-Gordon 場は spin 0 粒子**[*14] **を表す**と言える。

■規格化および 1 粒子状態

式 (2.34) の証明は，付録 B に記した。

さて，まず，Fock 真空を $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化されるように定義する。[*15]

1 粒子状態は $|\boldsymbol{p}\rangle \propto a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$ とするのが自然だろう。ところが，素直に

$$|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle, \qquad \langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$$

とすると上手くいかない。というのも，本来 Lorentz 不変量であるべき $\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle$ が，Lorentz 変換によって変化してしまうためである。

ところが，text にあるような計算から，$E_{\boldsymbol{p}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ が Lorentz 不変量であることが分かる。つまり

$$|\boldsymbol{p}\rangle := \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle, \tag{2.35}$$

$$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{2.36}$$

とすればよい。

[*12] Hints: 交換性，偶奇性，$(2\pi)^3$ の位置。

[*13] この ∞ は，理論の深部で問題を引き起こす。松尾先生によると，まず，系の体積を微小変化させたときこの ∞ 自体は発散するが，その微小変化は測定可能であり，実際に測定されている (Casimir energy) ので，素直に無視することは出来ないらしい。更に，この ∞ は Higgs 粒子 (Klein-Gordon 場に従う粒子) の energy に関係し，その energy を繰り込むには超対称性が必要になるらしい。(Epilogue P.790 付近参照。) まぁ明らかにこの本の範疇を超えている話である。

[*14] この spin 0 の粒子を Higgs 粒子という。また，Klein-Gordon 場の生成消滅演算子に添字を付けて Lorentz vector にして，spin を持つ粒子を考えることも出来……そうに見えるが，norm が負になったり繰り込みが出来なかったりしてひどく困難らしい。結局 QED(gauge 場) を考えねばならない。

[*15] いつものように，$a_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0$ などの性質を持つ。また，**energy と運動量は 0 であるとする。**

■Lorentz **回転**

Lorentz 回転 Λ に対応する unitary 演算子 $U(\Lambda)$ を考えると，(2.36) 式から $|\boldsymbol{p}\rangle$ は Lorentz 変換しても "ある"1 粒子状態になる，といえる。もちろんそれは $\Lambda\boldsymbol{p}$ の状態である "べき" であり，故に

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle \tag{2.37}$$

と書ける。

ここで，**真空が角運動量を持たないと仮定すれば**

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle &= U\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \\ &= U\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\,U^{-1}U|0\rangle \\ |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle &= \sqrt{2E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}\,a^\dagger_{\Lambda\boldsymbol{p}}|0\rangle \end{aligned}$$

において $\boldsymbol{U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle}$ **と同一視できて**，故に

$$U(\Lambda)a^\dagger_{\boldsymbol{p}}U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}{E_{\boldsymbol{p}}}}a^\dagger_{\Lambda\boldsymbol{p}} \tag{2.38}$$

が導かれる。$a, a^\dagger$ の変換則は普通ではないのだ。

■Lorentz **不変な積分**

量子力学と同様に考えれば，1 粒子状態の完備関係式が (2.39) のように書けることは明らかだろう。

ところで，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2 - m^2)\Big|_{p^0>0} \tag{2.40}$$

は **Lorentz 不変な積分** (Lorentz 不変性を保つ積分) である。この式の右辺が Lorentz 不変であることは明らかであろう。

さて，この等式が成立することを示そう。

Proof. つまり

$$\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} = \int \mathrm{d}p^0\,\delta(p^2 - m^2)\Big|_{p^0>0}$$

を示せばよい。

$p^2 = (p^0)^2 - \|\boldsymbol{p}\|^2$ であることに注意して，δ 関数の中身を p^0 の関数と見て

$$f(p^0) = (p^0)^2 - \|\boldsymbol{p}\|^2 - m^2$$

と置こう。$f(p^0) = 0$ は，$p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \|\boldsymbol{p}\|^2} = \pm E_{\boldsymbol{p}}$ に解を持つ。また $f'(p^0) = 2p^0$ より

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p^0 - E_{\boldsymbol{p}})] + \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\delta(p^0 + E_{\boldsymbol{p}})$$

となる。積分区間の制約から，示すべき式は示された。 □

ちなみに，証明過程から分かるとおり，(2.40) の右辺には p^0 を $E_{\boldsymbol{p}}$ に制限する力がある。左辺にはそれが明示されていないが，通常は左辺のように書いても「更に p^0 を $E_{\boldsymbol{p}}$ に制限する」ということが暗示されている。特に実際の計算では一度右辺に戻して計算する方が簡単そうである。

また，この積分を，Minkowski 空間上の **"mass-shell"** 上での積分と見る見方は大切である。

■$\phi(\boldsymbol{x})|0\rangle$ の解釈

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{p}\rangle \tag{2.41}$$

は，量子力学における式

$$|\boldsymbol{x}\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{p}\rangle$$

と非常に良く似ている。ただしここで $\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\rangle = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ であることに注意。

さらに $E_{\boldsymbol{p}}$ は速さ v が小さい時

$$E_{\boldsymbol{p}} \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

となり，とてもほぼ定数である。よって $\phi(\boldsymbol{x})|0\rangle$ の非相対論的極限を $|\boldsymbol{x}\rangle$ と同一視できる。

更にこの解釈は，$\langle \boldsymbol{p}|$ と $\phi(\boldsymbol{x})|0\rangle$ の内積が

$$\langle \boldsymbol{p}|\,\phi(\boldsymbol{x})|0\rangle = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad \cdots \qquad \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle$$

であることからも確認される。となると，$|\boldsymbol{p}\rangle$ も粒子量子論と全く同様に解釈することが出来ることになる。

■多粒子系

更に，2 粒子状態の波動関数を考えると更に興味深いことが言える。[*16]

$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$ であるような 2 粒子状態について，その波動関数は，規格化を気にしなければ

$$\langle 0|\phi(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{y})\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}\,a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle$$

と書ける。これを地道に計算すると，

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 p' \mathrm{d}^3 q'}{(2\pi)^6} \langle 0|a_{\boldsymbol{p}'}a_{\boldsymbol{q}'}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle \mathrm{e}^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}'}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{q}'} = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{q}} + \mathrm{e}^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p}}$$

となり，Boson の対称性が (座標空間への射影の仕方を工夫せずとも) 現れている。同様のことが n 粒子系について言え，これは Klein-Gordon 場が Boson を表すことそのものである。

[*16] この部分は松尾先生の教授による。

Section 2.4 The Klein-Gordon Field in Space-Time

■Heisenberg Picture

量子力学と同様にして，演算子 $\phi(\boldsymbol{x})$ の Heisenberg 描像を

$$\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{iHt}\phi(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-iHt} \tag{2.43}$$

となり，$i\dfrac{\partial}{\partial t}O = [O, H]$ を用いれば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = (\nabla^2 - m^2)\phi(x) \tag{2.45}$$

となる。

また，Baker-Hausdorff の補助定理

$$\mathrm{e}^{tG}A\mathrm{e}^{-tG} = \mathrm{e}^{t(G*)}\mathrm{e}^{-t(*G)}A = \mathrm{e}^{t[G,}A]$$

を用いれば,[17]

$$\mathrm{e}^{iHt}a_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-iHt} = \mathrm{e}^{-iE_{\boldsymbol{p}}t}a_{\boldsymbol{p}}, \qquad \mathrm{e}^{iHt}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{-iHt} = \mathrm{e}^{iE_{\boldsymbol{p}}t}a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \tag{2.46}$$

が分かるので，$\phi(x)$ の表式も求められる→ (2.47)。

同様に考えれば

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{iP\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{-i\cdot x} \tag{2.49}$$

が求められ，つまり $P^\mu := (H, \boldsymbol{P})^\mu$ が時空並進演算子となっていることが分かる。なお，$\boldsymbol{P}$ は全体の運動量であり，1 つの粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ とは区別して理解せねばならない。

ところで，状態

$$a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\cdots a^\dagger_{\boldsymbol{p}_n}|0\rangle$$

の波動関数は

$$\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)a^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\cdots a^\dagger_{\boldsymbol{p}_n}|0\rangle$$

となり，この波動関数には正 energy の項しか出てこない。つまり負 energy の問題は回避されたことになる。(更にこの場合に波動関数が対称な形，つまり Boson を表しているということも重要である。)

◆Causality

さて，

$$D(x-y) := \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} \tag{2.50}$$

を定義し，これを Klein-Gordon propagator(伝搬子) と呼ぶ。

因果律を議論するには，振幅ではなく観測を問題にしなければならない。言いかえれば，因果律を満たすと云うことは，space-like な 2 点 x, y において $\langle 0|\phi(x), \phi(y)|0\rangle = 0$，ではなく

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

であるということなのだ。遷移振幅は仮想的なものなのである。

[17] 数学では，$\mathrm{ad}(G)A := [G, A]$ として $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(G)}A$ みたいに書くらしい。また，この公式の名前は [2] に拠るが，この名前でいいのかはちょっと微妙である。

というわけでこの式

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x-y) - D(y-x), \qquad D(x-y) := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p}$$

が，space-like な場合に 0 になるのかどうか，考えてみよう。

> $x^0 > y^0$ と仮定しても一般性を失わない。そこで，$x^\mu := x^\mu - y^\mu$ と定義し直し，$x^0 > 0$ を仮定する。
>
> 空間部分を適当に回転させて $x^\mu = (t, x, 0, 0)^\mu$ としよう。ただし $0 < t < x$ である。この時
>
> $$D(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(p^1 x - p^0 t)}}{2E_p}$$
>
> である。ここで次のような Lorentz 変換 Λ を考えよう：
>
> $$\beta := -\frac{2xt}{x^2+t^2}, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$
>
> これを地道に計算すると，(意外と容易に)
>
> $$t' = \frac{t-x}{|t-x|} t = -t, \qquad \frac{x-t}{|x-t|} x = x$$
>
> が分かる。$t < x$ **であるが故に**，斉次 Lorentz 変換によってこのような時間反転ができたのである。
>
> ところで，p^μ を Lorentz 変換して $p'^\mu = \Lambda p^\mu$ とすればこの積分は scalar になるわけだが，しかし $p^0 \le p^1$ なので $\Lambda p^0 > 0$ であるから，なんと
>
> $$\begin{aligned} D(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i[(\Lambda p)^1 x + (\Lambda p)^0 t]}}{2E_p} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) e^{i[(\Lambda p)^1 x + (\Lambda p)^0 t]} \Big|_{p^0>0} \\ &= \int \frac{d^4\Lambda p}{(2\pi)^3} \delta(\Lambda p^2 - m^2) e^{i[(\Lambda p)^1 x + (\Lambda p)^0 t]} \Big|_{\Lambda p^0>0} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) e^{i(p^1 x + p^0 t)} \Big|_{p^0>0} \end{aligned}$$
>
> となる。更に，p^1 を $-p^1$ に変数変換すれば，なんと結局
>
> $$D(x) = D(-x)$$
>
> となる。

というわけで，space-like な 2 点間では確かに因果律は破れない。

■複素 Klein-Gordon 場

TODO: 先に Problem 2.2

◆The Klein-Gordon Propagator

この交換関係 $[\phi(x), \phi(y)]$ を真空 ket で挟むと，

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] \Big|_{p^0=E_p} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{e^{ip(x-y)}}{-2E_p} \Big|_{p^0=E_p} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_p} \Big|_{p^0=E_p} + \frac{e^{-ip(x-y)}}{-2E_p} \Big|_{p^0=-E_p} \right] \end{aligned}$$

となる。更に，$x^0 > y^0$ の時は

$$\int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi i}\frac{-1}{p^2 - m^2}\mathrm{e}^{-ip(x-y)}$$

一般に，

$$\begin{cases} L_\partial \phi(x) = f(x) \\ L_\partial G(x - x') = \delta(x - x') \end{cases}$$

の解 ϕ は

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int \mathrm{d}x'\, G(x - x')f(x')$$

となる。ただし ϕ_0 は $L_\partial \phi_0 = 0$ を満たす。

この時，$G(x)$ は周辺の点 $f(x')$ の情報を，$\phi(x)$ に伝えている，と考えることが出来るので，伝播関数 (propagator) または Green function という。

更に一般に，Fourier 変換を用いれば

$$G(x) = \int \mathrm{d}p \mathrm{e}^{ipx}\tilde{G}(p) \tag{2.51}$$

$$L(\partial)G(x) = \int \mathrm{d}p\, L(ip)\mathrm{e}^{ipx}\tilde{G}(p) = \delta(x) \tag{2.52}$$

$$\therefore 1 = \tag{2.53}$$

A　P.14 の $U(t)$ の計算 (非相対論)

■Philosophy

Text の 3 行目までは，Fourier 変換により速やかに導くことが出来る。基本的には，以降の計算は Fresnel 積分から得られる次の式

$$^\forall a > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pm iax^2} \mathrm{d}x = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (\because \text{Fresnel 積分}) \tag{A.1}$$

を用いて行う。

■計算

まず,

$$U_n(t) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}p_n \, \mathrm{e}^{-i(p_n^2/2m\hbar)t} \cdot \mathrm{e}^{ip_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_n/\hbar} \tag{A.2}$$

を $n = (1, 2, 3) = (x, y, z)$ に対して定義すると,

$$U(t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{p}^2/2m\hbar)t} \cdot \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/\hbar} \tag{A.3}$$

$$= U_x(t) \cdot U_y(t) \cdot U_z(t) \tag{A.4}$$

と書ける。ここで $\Delta_n := (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_n$ とおいて計算すると,

$$U_x(t) = \mathrm{e}^{im(\Delta_x)^2/2\hbar t} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, \mathrm{e}^{-it(p - m\Delta_x/t)^2/2m\hbar} \tag{A.5}$$

$$= \mathrm{e}^{im(\Delta_x)^2/2\hbar t} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p' \, \mathrm{e}^{-itp'^2/2m\hbar} \tag{A.6}$$

$$= \mathrm{e}^{im(\Delta_x)^2/2\hbar t} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{t}} \tag{A.7}$$

$$= \mathrm{e}^{im(\Delta_x)^2/2\hbar t} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} \tag{A.8}$$

となる。U_y, U_z も同様に計算できるため，結局

$$U(t) = \mathrm{e}^{im\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2/2\hbar t} \left(\frac{m}{2\pi\hbar t}\right)^{3/2} \times (\text{位相部分}) \tag{A.9}$$

となる。位相部分は無視して良いので，結局

$$U(t) = \mathrm{e}^{im\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2/2\hbar t} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \tag{A.10}$$

が得られる。

■補足

式 (A.1) は,

$$^\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-iax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} \tag{A.11}$$

と書き換えることが出来る。ただしここで，右辺は 2 価関数であり，実部が正となるように取らなければならないことに注意せねばならない。

B　Delta 関数の性質 (2.34) の証明

この節では，式 (2.34) を一般化した形

$$\boxed{\delta\big(f(x)\big) = \sum_{{}^{\forall}x_i \ \mathrm{s.t.}\ f(x_i)=0} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)} \tag{B.1}$$

を示す。ただし，この式の形からすぐ分かるように，**この公式を用いることが出来るのは，$f(x) = 0$ の実数解が高々可算個であり，更にその各点において $f'(x) \neq 0$ の場合である。**

すると結局，$x = x_0$ に解を持ち，更にその微小近傍 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ で狭義単調な関数 $f(x)$ について，

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{g(x_0)}{|f'(x_0)|} \tag{B.2}$$

が任意の関数 $g(x)$ に対して成立することを示せばよいことになる。

> まず，実数解が高々可算個であることから，x の区間 $(-\infty, \infty)$ を，その中に含まれる $f(x) = 0$ の解が高々 1 個となるように分割することができる。
> 更にその分割区間を無限小にする。$f'(x)$ が定義され，更に 0 でないことから，解の微小近傍では f は狭義単調である。
> 解を含まない区間の寄与は無いので，結局その各微小近傍のみを考えればよい。更に全ての解からの寄与は独立かつ対等なので，それぞれの微小近傍について考えてその和をとればよい。

> ところで，この式は，もし $f(x) = 0$ が x_0 以外に解を持たないならば
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}\mathrm{d}x \tag{B.3}$$
>
> と書ける。実は，**これは (2.34) 式そのもの**である。というのも，超関数の等式は
>
> $$\text{超関数 } f \text{ と } g \text{ が等しい} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \text{任意の関数 } \phi \text{ に対して} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{B.4}$$
>
> と言う意味だからである。

特に $f'(x_0) > 0$ の場合，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} g(x)\delta\Big((x - x_0)\cdot f'(x_0)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(x + x_0)\delta\Big(x \cdot f'(x_0)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\epsilon'}^{\epsilon'} g\left(\frac{X}{f'(x_0)} + x_0\right)\delta(X)\,\frac{\mathrm{d}X}{f'(x_0)} \\
&= \frac{g(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}$$

より示された。ただしここで，$\epsilon' = f'(x_0)\epsilon > 0$ であることに注意する。

一方 $f'(x_0) < 0$ の場合は，3 行目で積分区間が反転して正から負の向きになるため，結局 $-\dfrac{g(x_0)}{f'(x_0)}$ となる。

以上より (2.B.2) 式が示されたので，即ち (2.B.1) 式が示された。 □

参考文献

[1] 広江克彦. EMAN の物理学. `http://homepage2.nifty.com/eman/`.

[2] J. J. Sakurai. 『現代の量子力学 (上)』. 吉岡書店, Feb. 1989.