

### 5.3 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ : NONRELATIVISTIC LIMIT

これまでやったこと非相対論的極限を考える。極限を取れそうな式は (5.12)・(5.13) ぐらいなので

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \frac{\|\mathbf{k}\|}{E} \left[ \left(2 - \frac{\|\mathbf{k}\|^2}{E^2}\right) + \frac{\|\mathbf{k}\|^2}{E^2} \cos^2 \theta \right] \\ &\sim \frac{\alpha^2}{2E_{\text{cm}}^2} \frac{\|\mathbf{k}\|}{E} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\sim \frac{\alpha^2}{2E_{\text{cm}}^2} \frac{\|\mathbf{k}\|}{E} \quad (5.33)$$

となり、微分散乱断面積が  $\theta$  に依存しなくなる。この結果を、以前やったのと同じ方法で再導出する。

この導出は極めて簡単である。

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')) \quad (5.1)$$

であるが、まず最初に、始状態の spin がどちらも  $+z$  の偏極である場合を考える。

(5.29) 式<sup>a</sup>より

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \Big|_{+z,+z} = -2E[0, 1, i, 0]_{\text{for } \mu} \quad (5.34)$$

である。一方 muon 側は、(3.49)・(3.146) 式で  $p^3 \sim 0$  として

$$u = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \xi^{-t} \\ -\xi^{-t} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

であるので (5.36) のようになる。結果として

$$\mathcal{M}(e^-_{+z} e^+_{+z} \rightarrow \mu^+_t \mu^-_s) = -2e^2 \xi^{s\dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi^{-t} \quad (5.37)$$

となり、全 spin について足せば

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-_{+z} e^+_{+z} \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} \frac{\|\mathbf{k}\|}{E} \quad (5.38)$$

となる。

<sup>a</sup> つまり (3.49)・(3.146) 式で  $p_3 \sim E$  とした式。電子は  $E \sim m_\mu$  の時でも  $\|\mathbf{p}\| \sim E$  なので。

Spin について総和を取るとき、

$$\xi^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^\mp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{-\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{-\mp} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

であるため、(5.37) 式は muon の spin がどちらも  $+z$  になるような場合のみ値を持った。

その後の段落は何を言っているのか？ ひょっとして  $s$  波だから軌道角運動量が 0(そういえばこういう定義だった!!) だから角運動量保存、ってことか。となると相対論的な場合もこのような保存則は成り立っていたのか？ 調べてみる価値は有りそうだ。

始状態が  $e^-_{-z} e^+_{-z}$  の場合も、対称性より (5.38) と同じ結果となる。Spin が  $(+, -)$  の場合は、spinor の巻きが同じ(つまり表示した形では上下が逆)となるため 0 になる。

これら 4 つの場合を足し合わせ、始状態と終状態の重ね合わせ度合い  $2 \times 2$  で割ると、(5.33) が再現される。

◆ Bound States

粒子 (つていうか muon) がとても遅い場合, muon 間の Coulomb 相互作用による束縛状態が生じる。非相対論的極限を取ったことによる効果である。

束縛状態の議論は難しい。今回は非相対論的な 2 粒子束縛状態の生成・消滅を取り扱う。

■ 電子→束縛: 綺麗な spin の束縛状態

先ほどの議論より

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1^\uparrow, \mathbf{k}_2^\uparrow) = -2e^2 \quad (5.39)$$

であるわけだが, 一般に状態  $|B\rangle$  は

$$|B\rangle \simeq \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|}{(2m)^2} |B\rangle$$

の様展開できる。

ここで, 重心系を考え, 左から  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T$  をかけると, (4.73) 式より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_B) \\ (\text{右辺}) &= \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | B \rangle}{(2m)^2} \cdot \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \end{aligned}$$

となる。第 0 成分の積分をお互い了解してしまえば

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) \cdot \delta^{(3)}(\mathbf{p}_B) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | B \rangle}{(2m)^2} \cdot \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

となる。

ここで, 左辺の delta 関数は了解された形なので, 右辺も了解された形に変形せねばならない。そこで

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | B \rangle}{(2m)^2} \cdot \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Big|_{\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1}$$

となる。

さて。ここで規格化条件を満たすように

$$\tilde{\psi}^*(\mathbf{k}_1) \dots \frac{\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | B \rangle}{2m\sqrt{2M}}$$

と結び付けたいのだが, しかしながら左辺は  $\mathbf{k}_2$  で積分されることを待ち望む形であるので,

$$\tilde{\psi}^*(\mathbf{k}_1) := \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | B \rangle}{2m\sqrt{2M}} \Big|_{\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1}$$

と定義せねばならない。すると

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \frac{1}{2m} \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \mathbf{k}^\uparrow, -\mathbf{k}^\uparrow) \quad (5.44)$$

が導かれる。

この変形はかなりいい加減に見える変形であるが, 次元はとて一貫しており, (5.43) 式から (5.44) 式への変形に十分な説明を与えていると思う。

Center-of-mass frame を考えるともっとあっさり変形できるのかな? つていうかそうでもしないと総運動量  $\mathbf{K}$  を nonzero にしたときの状況は書けそうにないなあ。そもそも僕は (5.40) に対応する運動量がどうして (5.41) になるのかが分からなかった。

さて。気を取り直して (5.44) 式を考えると,  $M \simeq 2m$  からあっさり

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B) = \frac{\sqrt{2M}}{2m} (-2e^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{M}} (-2e^2) \psi^*(0) \quad (5.45)$$

となる。これはなんで natural なの??

### ■電子→束縛：任意の spin の束縛状態

我々は, 非相対論的極限では, 束縛状態の spin は muon の spin が  $+z, +z$  であるような場合に対応する形になることを知っている。ここでは, 非相対論的で無い場合にも拡張できるよう, 一般 spin に対する束縛状態への遷移確率を求めよう。

$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B)$  の表式は速やかに求まって,

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow B(s, t)) = \sqrt{2M} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \frac{1}{2m} \mathcal{M}(e_{\uparrow}^- e_{\uparrow}^+ \rightarrow \mu_t^+(\mathbf{k}), \mu_s^-(-\mathbf{k}))$$

となる。また, そもそもの  $\mathcal{M}(e_{\uparrow}^- e_{\uparrow}^+ \rightarrow \mu_t^+(\mathbf{k}), \mu_s^-(-\mathbf{k}))$  の散乱断面積は, P.147 でやった考察を使えば, ある matrix  $\Gamma$  を用いて

$$\mathcal{M}(e_{\uparrow}^- e_{\uparrow}^+ \rightarrow \mu_t^+(\mathbf{k}), \mu_s^-(-\mathbf{k})) = \xi^{s\dagger} \Gamma(\mathbf{k}) \xi^{-t} = \text{Tr} [\Gamma(\mathbf{k}) \xi^{-t} \xi^{s\dagger}]$$

となるわけである。ちなみに非相対論的極限では  $\Gamma(\mathbf{k}) \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  となる。

さて。一般に,

$$\begin{cases} \text{spin 1 の時} & \xi^- \xi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \text{spin 0 の時} & \xi^- \xi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1} \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\xi^- \xi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1} \quad (5.49)$$

となる。

この美しい証明は思いつかなかった。しかし, spin 0 状態の表式  $\frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]$  が

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_0$$

と表せること, spin 0 状態が回転に対して (物理的にも表式  $\sigma_0$  的にも) 対称であること, 更に複素  $2 \times 2$  行列の基底が  $\sigma_\mu$  で張られることを考えると明らかだろう。

ということで (5.50) 式は言える。きつとここにはもっともっと深い意味があるはずなのだが.....。

### ◆ Vector Meson Production and Decay

非相対論的極限で考える。  $e_{\uparrow}^- e_{\uparrow}^+$  による散乱については,

$$\mathcal{M} \propto \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi^- \xi^\dagger \right]$$

であるので, 結局  $\xi^- \xi^\dagger$  の左下の成分, 即ち  $\mathbf{n}^* \cdot (\hat{x} + i\hat{y})$  のみが効くことになる。

また,  $e_{\uparrow}^- e_{\uparrow}^+$  による散乱の場合も, (5.47) 式と同様にして

$$\mathcal{M} \propto \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi^- \xi^\dagger \right]$$

であることがわかるので、結局  $\mathbf{n}^* \cdot (-\hat{x} + i\hat{y})$  が効くことがわかる。

よって、unpolarized な粒子による散乱についての  $\mathcal{M}$  を考えると、spin 1 の状態は 3 状態考えられることから

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow B_n)|^2 &= \frac{2}{M}(4e^4) \left[ \frac{1}{4} (|\mathbf{n}^* \cdot \epsilon_+|^2 + |\mathbf{n}^* \cdot \epsilon_-|^2) \right] |\psi(0)|^2 \\ &= \frac{2}{M}(4e^4) \left[ \frac{1}{4} (|n_x|^2 + |n_y|^2) \right] |\psi(0)|^2 \end{aligned}$$

となる。更に、 $\mathbf{n}$  に直交する 2 方向について考えて和を取ると

$$|\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow B_n)|^2 = \frac{2}{M}(4e^4) \frac{1}{2} |\psi(0)|^2$$

となる。<sup>\*1</sup>

あとは (4.79) 式を考えれば (5.53) を得る。積分を取り払って

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow B) = \frac{1}{8m^2} \cdot \delta(E_{\text{cm}}^2 - M^2) \cdot \frac{2}{M}(4e^4) \frac{1}{2} |\psi(0)|^2 = \frac{64\pi^3\alpha^2}{M^3} \cdot \delta(E_{\text{cm}}^2 - M^2) |\psi(0)|^2 \quad (5.54)$$

を得る。

この結果は、束縛状態が電子対消滅における共鳴状態であることを意味する.....って共鳴状態を 120% 理解してないのですが、まあいいや。束縛状態の時間幅が短ければ、energy の不確定性も許されてこの delta 関数は共鳴 peak の形となる。<sup>\*2</sup>

#### ■崩壊

束縛状態が生じたなら、その逆反応も起こるはずだ、と。特に、電子に戻る場合でなく、更に軽い lepton になる場合もある。

量子力学的に考えれば、逆反応に対する  $\mathcal{M}$  は、 $\mathcal{M}^\dagger$  で与えられる。よって (4.86) 式より

$$\Gamma(B \rightarrow e^+e^-) = \frac{4e^4}{M^2} \int d\Pi_2 (|n_x|^2 + |n_y|^2) |\psi(0)|^2 \quad (5.55)$$

$$= \frac{4e^4}{M^2} \int \left( \frac{1}{8\pi} \frac{d \cos \theta}{2} \right) (|n_x|^2 + |n_y|^2) |\psi(0)|^2 \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi\alpha^2}{M^2} \int d \cos \theta (|n_x|^2 + |n_y|^2) |\psi(0)|^2 \\ &= \frac{16\pi\alpha^2}{3} \frac{|\psi(0)|^2}{M^2} \end{aligned} \quad (5.57)$$

となる。<sup>\*3</sup>( $n_x$  などを 4 で割らないことに注意。っていうかこんなの言われないと気づかない.....。)

#### ■散乱断面積と崩壊率の関係

ちょっとじっくり考えるだけの気力がないので、みんなで物理的意味を考えましょう。

<sup>\*1</sup> うは.....式を追うことしかできない.....。

<sup>\*2</sup> Sec.4.5 で、どうして (4.64) のような量子力学と同じ形の共鳴 peak で表されるのか、という疑問があったけど、.....その疑問は hold されたままだな。

<sup>\*3</sup> あれ.....cosine の積分はどうやったんだ.....? ; ;

### ■応用例：Quarkonium

応用例は、muon ではなく、quark と antiquark がくっついた、quarkonium である。

Quarkonium の中で spin 1 のものには、 $J/\psi$  粒子 (charmonium( $c\bar{c}$ ) の第 1 励起状態)、 $\psi$  粒子 (charmonium の第 7 励起状態)、 $\Upsilon$  粒子 (bottomonium( $b\bar{b}$ ) の第 1 励起状態) などがある。<sup>\*4</sup> いくつかは Fig.5.3 に現れている

散乱断面積の計算に必要な  $\psi(0)$  の値は、さすがに quark については第一原理的には考えられないが、非相対論的・現象論的に解析されている。まあとりあえず、そこに与えられている公式を使えば、quark に特徴的な長さが femtometer の程度であることがわかるとかなんとか。

### ■おまけ

今回は、第一原理から全てを導く代わりに、近似式を用いて解いた。が、もちろん相対論的に厳密に考えることも出来る。

この散乱理論は、Feynman diagram では図のような束縛状態として書けるが、これは muon loop を高次項まで足していったことと同じであるらしい。

### ◆ 追記

今回はだいぶアタマの回っていない状態で書いた部分が多いので、かなりアラやら勘違いやらがあるかもしれません ; ; ; ;

---

<sup>\*4</sup> もちろん基底状態は spin 0 の状態である。